

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 79: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		2		1	$+\infty$

The graph shows a function $f(x)$ plotted against x . The function starts at $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$, increases to a local maximum at $x = -2$ with a value of $y = 2$, decreases to a local minimum at $x = 0$ with a value of $y = 1$, and then increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$. The derivative $f'(x)$ is positive for $x < -2$, zero at $x = -2$, negative for $-2 < x < 0$, zero at $x = 0$, and positive for $x > 0$.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Lời giải

ĐS: 3

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

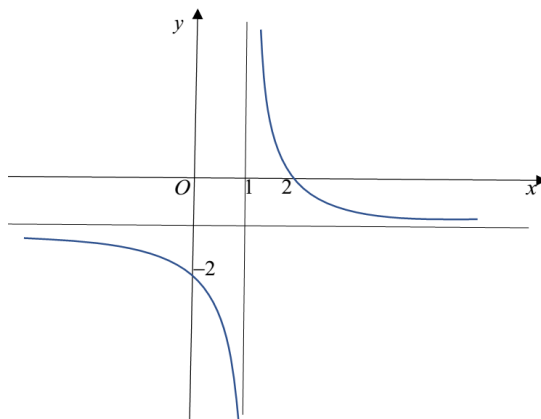
$$f(0) = d = 1 > 0 \Rightarrow d > 0.$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ vì } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$x_{cd} + x_{ct} = -2 + 0 = -2 < 0 \Rightarrow \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0.$$

Vậy có ba số dương.

Câu 80: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, có đồ thị là hình vẽ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Lời giải

ĐS: -9

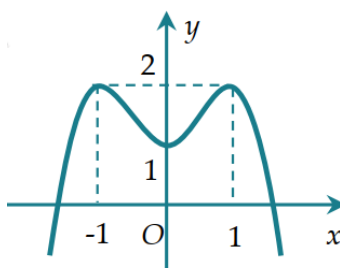
Tiệm cận đứng $x = -c = 1 \Rightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang $y = a = -1$.

Giao điểm trục Oy là $y = \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = 2$.

$$T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$$

Câu 81: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0$ là:

Lời giải

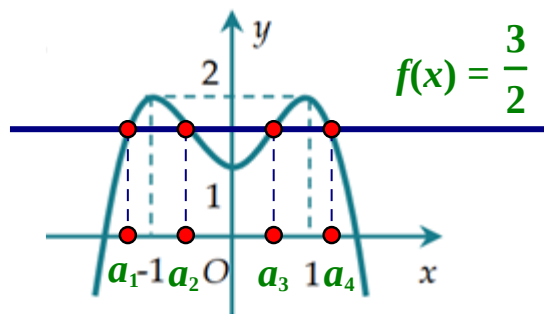
ĐS: 6

Trường hợp 1: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$.

Trường hợp 2: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$.

Khi đó:

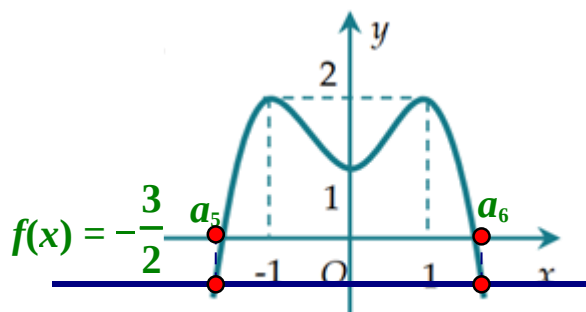
$$2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \left(2f(x) - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 \ (a_1 < -1) \\ x = a_2 \ (-1 < a_2 < 0) \\ x = a_3 \ (0 < a_3 < 1) \\ x = a_4 \ (a_4 > 1) \end{cases}$$



So với điều kiện, ta nhận: $x = a_1$ và $x = a_3$.

Trường hợp 3: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$.

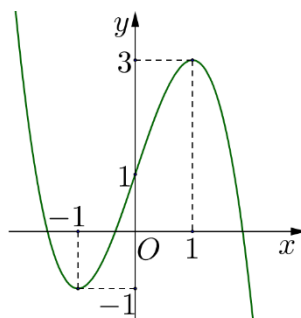
$$2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) \cdot f'(x) - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_5 \ (a_5 < -1) \\ x = a_6 \ (a_6 > 1) \end{cases}.$$



So với điều kiện, ta nhận: $x = a_6$.

Nhận thấy các nghiệm trên phân biệt nên phương trình $2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0$ có 6 nghiệm.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?



Lời giải

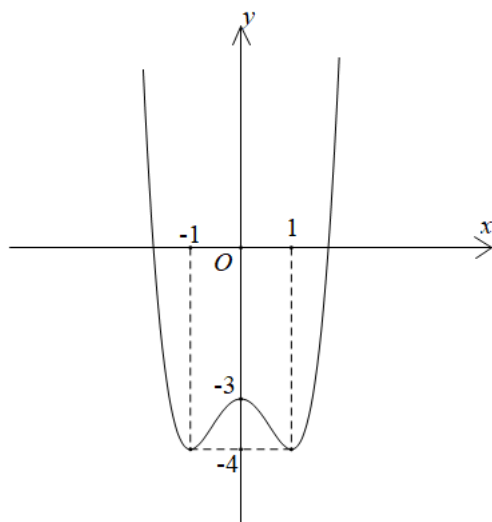
ĐS: 4

Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow t \in [-1; 0) \rightarrow f(t) \in [-1; 1)$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow \exists t \in [-1; 0) \text{ s.t. } f(f(t)) = m \Leftrightarrow -1 \leq m < 3$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

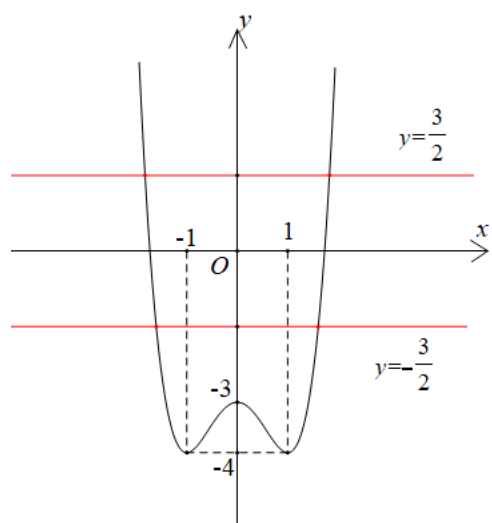


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ là

Lời giải

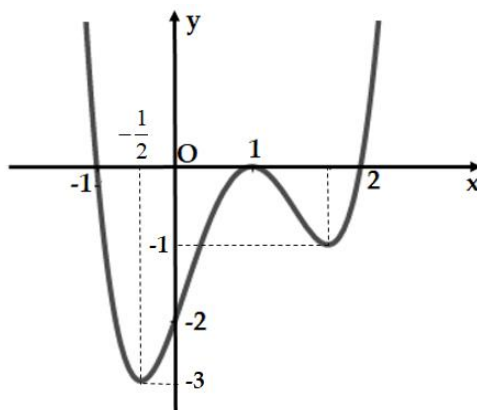
ĐS: 4

$$2|f(x)| - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} \\ f(x) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



Từ đồ thị, ta thấy hai đường thẳng $y = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt. Vậy phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

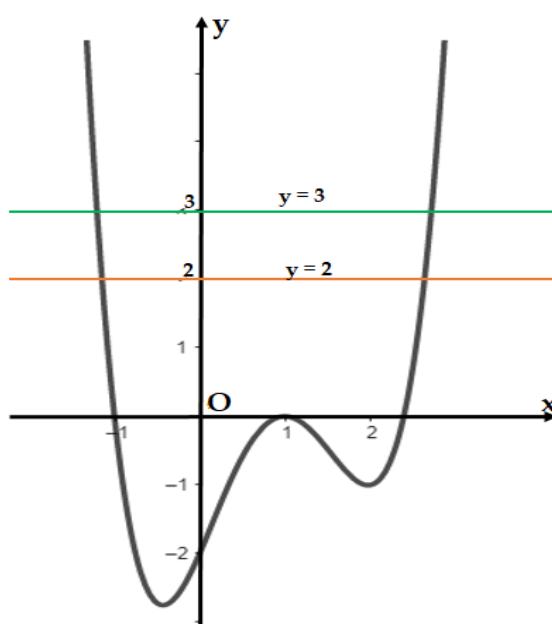
Câu 84: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới.



Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 7



Ta có phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = -1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (3 nghiệm)} \\ f(x) = 2 \text{ (2 nghiệm)} \\ f(x) = 3 \text{ (2 nghiệm)} \end{cases}$

Các nghiệm trên không trùng nhau. Vậy phương trình $g(x) = 0$ có 7 nghiệm.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc ba có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1		$\searrow$ 0		$\nearrow +\infty$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right)$. Phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 7

Ta có $g'(x) = f'(x)[f(x)-1]f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0; f(x) = 1 \\ f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right) = 0. \end{cases}$$

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$

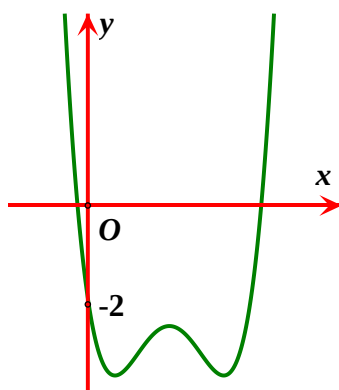
Xét phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \left(a > \frac{3}{2} \right). \end{cases}$

Xét phương trình

$$f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f^2(x)-f(x) = 0 \\ \frac{1}{2}f^2(x)-f(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = b (b < 0) \end{cases} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x = c (c > a) \\ f(x) = 3 \Leftrightarrow x = d (d > c) \\ f(x) = -1 \Leftrightarrow x = e (e < b). \end{cases}$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 86: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x$. Số nghiệm thực của phương trình $f[g(x)f(x)] + 2 = 0$ là



Lời giải

ĐS: 8

Ta có: $\sqrt{x^2 + 4} > \sqrt{x^2} = |x|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} + x > |x| + x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4} - x > |x| - x \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình: $f[g(x)f(x)] + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow f[g(x)f(x)] = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \cdot f(x) = 0 \\ g(x) \cdot f(x) = a \in (0;1) \\ g(x) \cdot f(x) = b \in (2;3) \\ g(x) \cdot f(x) = c \in (3;4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad (1) \quad \left(\text{do } g(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \right) \\ f(x) = \frac{1}{4}a(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (2) \\ f(x) = \frac{1}{4}b(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (3) \\ f(x) = \frac{1}{4}c(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (4) \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{4}t(\sqrt{x^2 + 4} - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($t > 0$)

$$h'(x) = \frac{1}{4}t \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} < 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0$$

Từ đồ thị ta thấy các phương trình (2), (3), (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 87: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Phương trình $\sqrt{15 - 2x - x^2} \cdot \sin[\pi \cdot f(x)] = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

Lời giải

ĐS: 113

Ta có $15 - 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3$.

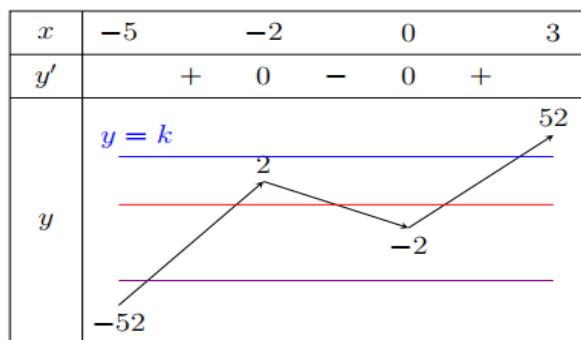
$$\text{Phương trình } \sqrt{15-2x-x^2} \cdot \sin[\pi \cdot f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15-2x-x^2=0 & (1) \\ \sin[\pi f(x)]=0. & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-5. \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x)=k, \text{ với } k \text{ nguyên.}$$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $f(x)=x^3+3x^2-2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)=x^3+3x^2-2$, trên khoảng $(-5;3)$ ta có:



Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $-52 < k < -2$ hoặc $2 < k < 52$ thì phương trình $f(x)=k$ có một nghiệm. Do đó $f(x)=k$ có tối đa 98 nghiệm.

Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $k=-2$ hoặc $k=2$ thì phương trình $f(x)=k$ có hai nghiệm. Do đó $f(x)=k$ có tối đa 4 nghiệm.

Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $-2 < k < 2$ thì phương trình $f(x)=k$ có ba nghiệm. Do đó $f(x)=k$ có tối đa 9 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tối đa $2+98+4+9=113$ nghiệm.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$. Tìm tổng các số nguyên m sao cho phương trình $f(x^3-3x)=m$ có 7 nghiệm phân biệt.

Lời giải

ĐS: 0

Đặt $t=x^3-3x$ (1). Ta có BBT của hàm số $t=x^3-3x$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$t = x^3 - 3x$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Khi đó ta có: $f(x^3 - 3x) = m \Leftrightarrow f(t) = m \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = m \quad (2)$

Để phương trình có 7 nghiệm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm t trong đó có 2 nghiệm $t \in (-2; 2)$ và 1 nghiệm $t > 2$ hoặc $t < -2$.

Ta có BBT của hàm số $y = t^3 - 3t^2 + 2$:

t	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$y = t^3 - 3t^2 + 2$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Dựa vào BBT, để thỏa mãn yêu cầu trên thì $m \in (-2; 2) \xrightarrow{m \in \mathbb{Q}} m \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow \sum_{-1}^1 m = 0$

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				2			$+\infty$
			-2				-3	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt?

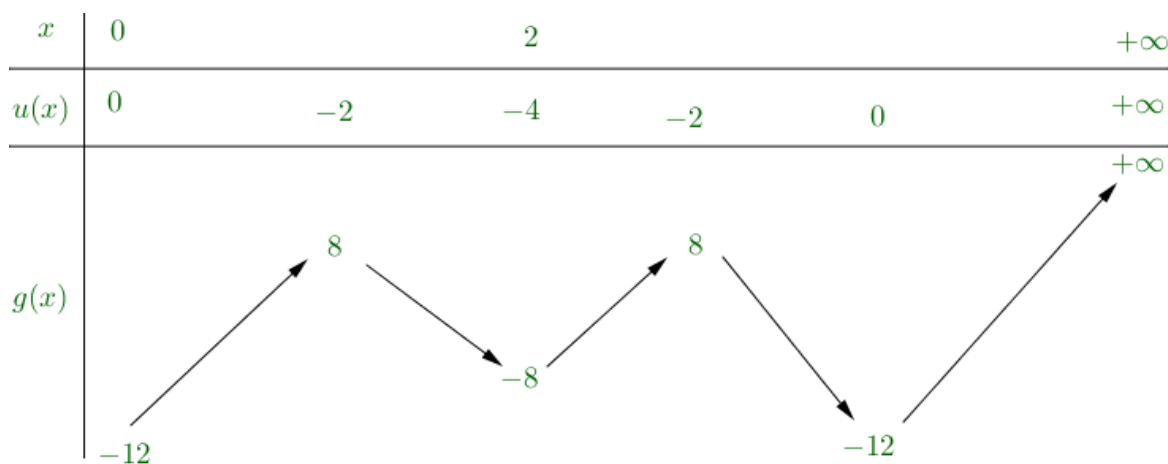
Lời giải

ĐS: 20

Ta có: $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow 4f(u(x)) = m$, với $u(x) = x^2 - 4x$.

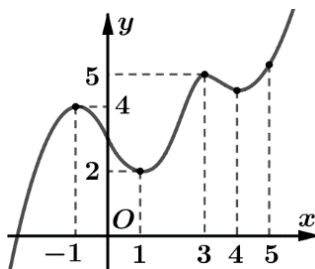
Đặt $g(x) = 4f(u(x))$.

Phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi đồ thị hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và đường thẳng $y = m$ có ít nhất ba điểm chung phân biệt.



Vậy phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi $-12 < m \leq 8$, mà m nguyên nên $m = -11, -10, \dots, 8$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\log_3 x) = m - 1$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$?



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

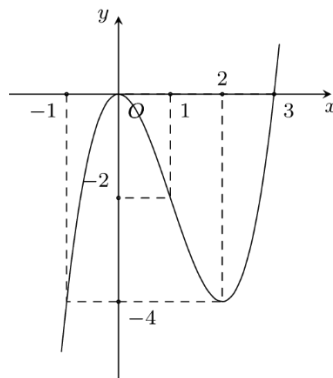
Lời giải

ĐS: 1

Đặt $u = 3\log_3 x, x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right) \Rightarrow u \in [-1; 3)$. Do hàm số $u = 3\log_3 x$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên với $u \in [-1; 3)$ phương trình có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u) = m - 1$ có nghiệm duy nhất trên $[-1; 3)$. Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases} m - 1 = 1 \\ 4 < m - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 5 < m < 6 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2$.

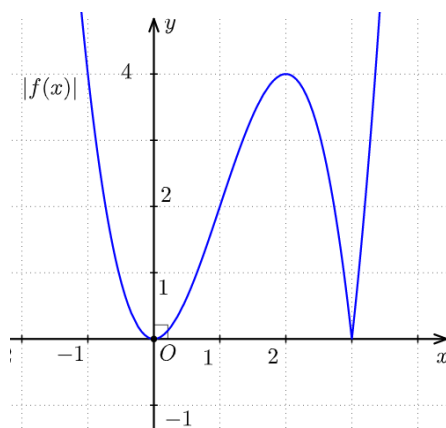
Câu 91: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 3



Dựa vào giả thiết ta vẽ được đồ thị hàm số $|f(x)|$ như bên trên

Ta có: $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - m - 1) = 0$

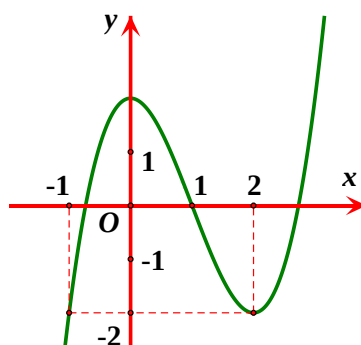
TH1: $|f(x)| = 4$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $|f(x)| = m + 1$ theo yêu cầu bài toán thì phương trình cần có 4 nghiệm phân biệt, nên:

$0 < m + 1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$?

Lời giải

ĐS: 1

$$PT \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = -1 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m \end{cases}$$

Xét

$$+ f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3	$1+2\sqrt{2}$	3

Từ BBT trên phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m$ có nghiệm

$$+ g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

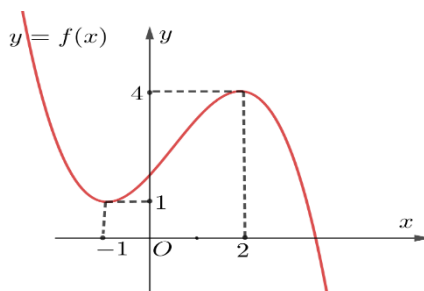
x	-2	0	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$2\sqrt{2}-2$	0

Từ BBT trên phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2$

Vậy PT $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2 \\ 3 < m \leq 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}, m \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{có 1 giá trị nguyên } m = 3 \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 93: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

Lời giải

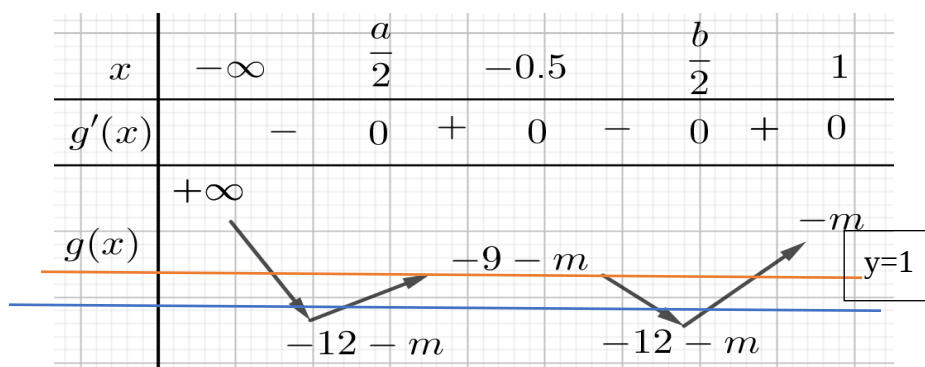
ĐS: 1

+ Đặt $g(x) = 3f^2(2x) - 12f(2x) - m$.

Ta có $g'(x) = 12f(2x) \cdot f'(2x) - 24 \cdot f'(2x) = 12f'(2x)[f(2x) - 2]$.

$$+ \text{ Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f(2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \\ 2x = a \in (-\infty; -1) \\ 2x = b \in (-1; 2) \\ 2x = c \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \\ x = \frac{a}{2} \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ x = \frac{b}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = \frac{c}{2} \in (1; +\infty) \end{cases}$$

+ Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.



Tính giá trị

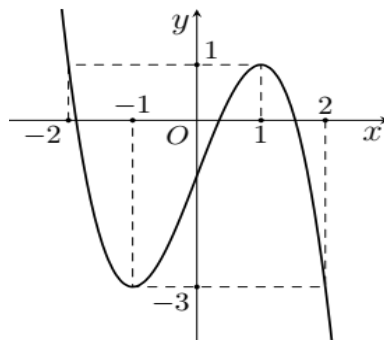
© Tại $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{b}{2} \end{cases} \Rightarrow f(2x) = 2 \Rightarrow g(x) = 3f^2(2x) - 12f(2x) - m = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - m = -12 - m$

© Tại $x = -0,5 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow f(2x) = f(-1) = 1 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - m = -9 - m$

$|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = -1 \end{cases}$, ta vẽ hai đường thẳng $y = \pm 1$ vào BBT để có ít nhất

7 nghiệm khi $-12 - m < -1 < 1 \leq -9 - m \Leftrightarrow -11 < m \leq -10, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -10$.

Câu 94: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0$ có đúng ba nghiệm $x \in [0; +\infty)$

Lời giải

ĐS: 4

Xét phương trình: $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(-x^2 + 4x + m) = -3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + m = -1 \\ -x^2 + 4x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = m + 1 & (1) \\ x^2 - 4x = m - 2 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x$ với $x \in [0; +\infty)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	0	$\searrow$ -4	$\nearrow$ $+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt có 2 nghiệm và phương trình có 1 nghiệm hoặc phương trình có 1 nghiệm và phương trình có 2 nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m - 2 \leq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 2 \\ m = -2 \end{cases} \text{ Suy ra có 4 giá trị nguyên của } m.$$

Câu 95: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các hệ số thực và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$

Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để phương trình $f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt là

Lời giải

ĐS: -3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $y = f(x) = -x^4 + 2x^2$.

Xét phương trình $f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$.

Điều kiện $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Đặt $t = \sqrt{f(x)}, (0 \leq t \leq 1)$.

Ta được phương trình $t^2 + 2t - t^4 + 2t^2 + m = 1 \Leftrightarrow -t^4 + 3t^2 + 2t - 1 = -m$.

Đặt $h(t) = -t^4 + 3t^2 + 2t - 1 \Rightarrow h'(t) = -4t^3 + 6t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$.

Bảng biến thiên của $y = h(t)$

t	0	1
$h'(t)$		+
$h(t)$	-1	3

Với mỗi $t, (0 < t < 1)$ thì phương trình $f(x) = t$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó để phương trình

$f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-1 < -m < 3$.

$$\text{Do } \begin{cases} m \in [-20; 20] \\ m \in \square \\ -1 < -m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-20; 20] \\ m \in \square \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0, m = -1, m = -2 \Rightarrow 0 - 1 - 2 = -3.$$

Câu 96: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$			0				$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) - f^2(x) = m$ có ít nhất 6 nghiệm?

Lời giải

ĐS: 6

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta tìm được $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$

Khi đó phương trình

$$f(f(x)) - f^2(x) = m \Leftrightarrow \frac{1}{8}f^4(x) - 2f^2(x) = m \quad (1)$$

Đặt $t = f(x) \geq -2$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{8}t^4 - 2t^2 = m \quad (2)$

Xét hàm số $y = \frac{1}{8}t^4 - 2t^2 \quad (t \geq -2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}t^3 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = 0 \\ t = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

t	-2	0	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		+	0	-	
			0	-	0
y	-6		-6	-8	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có các kết quả sau:

+ Nếu $m < -8$ thì vô nghiệm suy ra vô nghiệm

+ Nếu $m = -8$ thì có nghiệm $t = 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{2}$

Vậy khi $m = -8$ thì có 2 nghiệm.

+ Nếu $-8 < m < -6$ thì có 2 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = b \in (2; 2\sqrt{2}) \Rightarrow f(x) = b \in (2; 2\sqrt{2})$

Vậy khi $-8 < m < -6$ thì có 4 nghiệm

+ Nếu $m = -6$ thì có 3 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = 2 \Rightarrow f(x) = 2$

$t_3 = -2 \Rightarrow f(x) = -2$

Vậy khi $m = -6$ thì có 6 nghiệm.

+ Nếu $-6 < m < 0$ thì có 3 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = b \in (0; 2) \Rightarrow f(x) = b \in (0; 2)$

$t_3 = c \in (-2; 0) \Rightarrow f(x) = c \in (-2; 0)$

Vậy khi $-6 < m < 0$ thì có 8 nghiệm.

+ Nếu $m = 0$ thì có 2 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$$t_2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Vậy khi $m = 0$ thì có 5 nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } m > 0 \text{ thì có 1 nghiệm } t = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$$

Vậy khi $m > 0$ thì có 2 nghiệm.

Kết luận: phương trình có ít nhất 6 nghiệm khi $-6 \leq m < 0$

Vậy có 6 số nguyên cần tìm.

Câu 97: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S .

Lời giải

ĐS: $T = -12$

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = -2m$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			28		-4		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} -2m = 28 \\ -2m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -14 \\ m = 2 \end{cases}$.

Suy ra $S = \{-14; 2\}$.

Vậy $T = -14 + 2 = -12$.

Câu 98: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là

Lời giải

ĐS: -6

Xét phương trình: $\frac{2x-3}{x-1} = x+m \Leftrightarrow 2x-3 = (x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt dương khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - 4(-m+3) > 0 \\ 3-m > 0 \\ 3-m > 0 \\ 1+m-3-m+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \Leftrightarrow m < 1 \\ m < 3 \end{cases}$$

Vậy các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-3; 3]$ thỏa mãn bài toán là: $-3; -2; -1; 0$

Cách 2

Xét phương trình: $\frac{2x-3}{x-1} = x + m \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - x = m \quad (2)$

Xét hàm số $h(x) = \frac{2x-3}{x-1} - x$, $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'		0	+	+	0	-
y						
					</	

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương khác 1. Khi đó đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại hai điểm phân biệt trên khoảng $(0; +\infty)$. Dựa vào BBT của hàm số $h(x)$ ta có: $m < 1$.

Câu 99: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

Lời giải

ĐS: 16

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m}$ ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases}$. Từ đó suy ra $f(t) + t^3 = f(x) + x^3, (1)$.

Đặt $g(x) = f(x) + x^3 = x^5 + 4x^3 - 4m$ thì $g'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (1) ta suy ra $t = x$ hay $f(x) + m = x^3 \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Xét hàm $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên $[1; 2]$ ta có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0$. Nên GTNN và GTLN của $h(x)$ lần lượt là $h(1) = 3$ và $h(2) = 48$.

Phương trình có nghiệm trên $[1; 2]$ khi và chỉ khi $3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 100: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$ là

Lời giải

ĐS: 12

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - 2 - m}_{g(x)} = 0 \end{cases} (a).$$

$$+ \text{ Hai đường cắt nhau tại ba điểm phân biệt } \Leftrightarrow pt(a) \text{ có 2 nghiệm pb khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

$$+ \text{ Giả sử } x_3 = 1, \text{ ta có: } x_1^2 + x_2^2 + 1^2 > 5 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 4 \\ \Rightarrow (2)^2 - 2 \cdot (-2 - m) > 4 \Leftrightarrow m > -2$$

Kết hợp với điều kiện $m \in [-10; 10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; \dots; 10\}$.

Câu 101: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ có đồ thị tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4, với m là tham số. Số nghiệm của phương trình $f(x) = f(-3)$ là.

Lời giải

ĐS: 1

Do đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 nên đồ thị còn cắt trục hoành tại một điểm khác nữa, ta giả sử điểm đó có hoành độ $x_0 \neq 1$.

$$\text{Khi đó } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - 1)^2(x - x_0).$$

Do đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4 nên ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 2m - 1 \\ f(4) = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \cdot x_0 = 2m - 1 \\ 9a(4 - x_0) = 2m - 1 \end{cases} \Rightarrow -a \cdot x_0 = 9a(4 - x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - 1)^2 \left(x - \frac{9}{2} \right).$$

$$\text{Vậy } f(x) = f(-3) \Leftrightarrow a(x - 1)^2 \left(x - \frac{9}{2} \right) = -120a \Leftrightarrow 2x^3 - 13x^2 + 20x + 231 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Câu 102: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

Lời giải

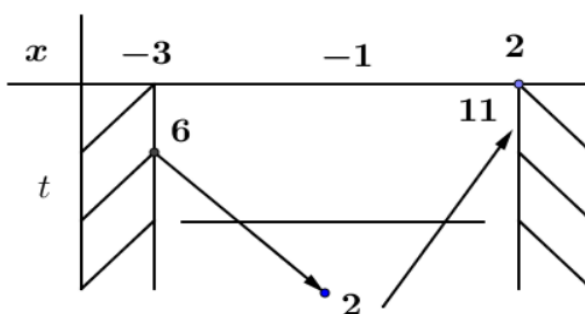
ĐS: 143

Phương trình $x^2 + 2x + 3 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1 + x_2 = -2$

Phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ (1) có tổng nghiệm bằng -4

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm xảy ra ở trường hợp: 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (2)

Đặt $x^2 + 2x + 3 = t$



Điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm $2 < t < 6$ (2)

Xét $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 64t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 4 \end{cases}$$

t	2	4	6
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-108		148
		-252	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -108 \Rightarrow 143$ số.

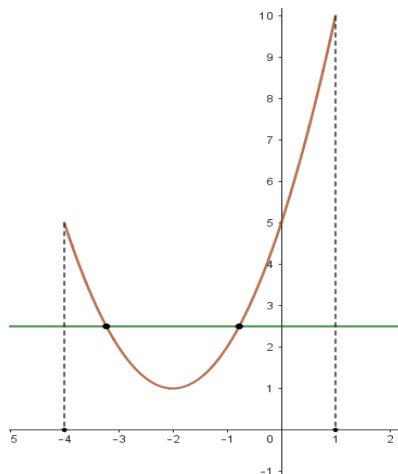
Câu 103: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

Lời giải

ĐS: 63

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, vì $x \in (-4; 1) \Rightarrow t \in (1; 10)$.

Nhận xét: với $1 < t < 5$ ta suy ra có 2 giá trị x có tổng bằng -4 .



Yêu cầu bài toán tương đương $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1; 10)$

x	1	3	10
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	–13	–77	8204

Nhận xét: $f(1) = f(\sqrt{17})$ và phương trình $f(t) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t \in (1; 10)$.

TH1: Nếu $f(t) = m$ chỉ có 1 nghiệm $t \in (1; 10)$ thì tổng các nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + 5 = t_0$ sẽ là -4 .

TH2: Nếu $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1; t_2 \in (1; 10) \Rightarrow t_1; t_2 \in (1; \sqrt{17})$

Khi đó mỗi phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 5 = t_1 \\ x^2 + 4x + 5 = t_2 \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$. Từ đó

suy ra tổng các nghiệm là -8 .

Vậy $m \in (-77; -13)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-76; \dots; -14\} \Rightarrow$ có 63 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 104: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

Lời giải

ĐS: 80

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, với $x \in (-4; 1) \Rightarrow x^2 + 4x + 5 - t = 0$ (*).

Ta có: $t' = 2x + 4$.

$t' = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	-4	-2	1
t'	-	0	+
t	5	1	10

Do đó, với $t < 1$, phương trình (*) vô nghiệm.

Với $t = 1$ hoặc $5 \leq t < 10$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Với $1 < t < 5$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = -4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1; 5)$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$ với $t \in (1; 5)$.

$$f'(t) = 4t^3 - 64t.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Bảng biến thiên:

x	1	4	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-27	-252	-171

Dựa vào bảng biến thiên, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -171$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-251; -250; \dots; -172\}$.

Vậy có 80 giá trị cần tìm.

Câu 105: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4

Lời giải

ĐS: 24

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 4, \text{ TXĐ } D = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x + 3)$, TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x + 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x+3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x+3=0 \\ x^2+2x+3=3 \\ x^2+2x+3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	x_1	-2	x_2	-1	x_3	0	x_4	2	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	652		-77		-52		-77		12467	

$$g(-1) = f(2) = -52$$

$$g(-2) = f(3) = -77; \quad g(0) = f(3) = -77; \quad g(-3) = f(6) = 652; \quad g(2) = f(11) = 12467$$

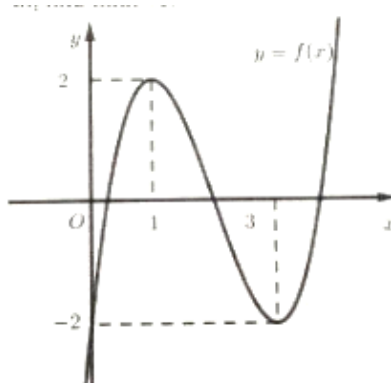
Ta thấy hàm số $g(x)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Do đó tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2+2x+3) = m$ bằng -4 khi nó có bốn nghiệm phân biệt.

Yêu cầu bài toán tương đương với $-77 < m < -52$.

Kết luận: Vậy có 24 giá trị m nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $t = f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

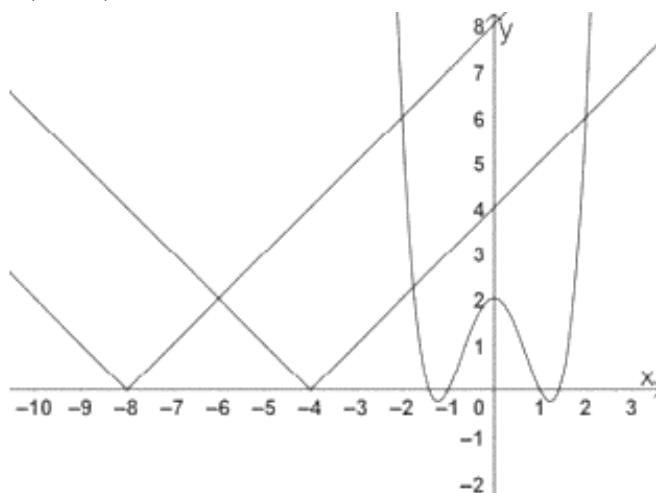
Với $t > 2$ hoặc $t < -2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 1 nghiệm.

Với $t = \pm 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Với $-2 < t < 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Từ $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ ta có phương trình: $t^4 - 3t^2 + 2 = |t + 2m| (*)$.

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 1 nghiệm $t \in (-2; 2)$ và 1 nghiệm $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



Vẽ đồ thị các hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$; $y = |x + 2m|$ trên cùng 1 hệ trục, ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi: $2m \in (-8; -4) \cup (4; 8) \Leftrightarrow m \in (-4; -2) \cup (2; 4)$.

Kết hợp với m nguyên nên ta có 2 giá trị của m là ± 3 .

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) và có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 6x + 12$. Biết đồ thị (C) đi qua điểm $M(-2; 2)$ và tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng $d: y = 2x + 6$. Khi đó giá trị của $f(3)$ bằng

Lời giải

ĐS: 137

Ta có: $f'(x) = \int (6x + 12)dx = 3x^2 + 12x + C$

$$f'(-2) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2)^2 + 12(-2) + C = 2 \Leftrightarrow C = 14$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 14$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 12x + 14)dx = x^3 + 6x^2 + 14x + C$$

Do đồ thị (C) đi qua điểm $M(-2; 2)$ nên ta có: $(-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 14 \cdot (-2) + C = 2 \Leftrightarrow C = 14$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 14x + 14$$

$$\text{Vậy } f(3) = 137$$